ສາທາລະນະລັດ ປະຊາທິປະໄຕ ປະຊາຊົນລາວ

ສັນຕິພາບ ເອກະລາດ ປະຊາທິປະໄຕ ເອກະພາບ ວັດທະນາຖາວອນ

ກະຊວງສຶກສາທິການ ແລະ ກິລາ

ກົມມັດທະຍົມສຶກສາ

ຫົວບົດສອບເສັງແຂ່ງຂັນນັກຮຽນເກັ່ງ ມ7

ທົ່ວປະເທດ ປະຈຳສົກຮຽນ 2011-2012

ວິຊາ ຄະນິດສາດ (ເວລາ: 120 ນາທີ)

1. (1 ຄະແນນ) ໃຫ້ຕ່ຳລາ $f(x)=x^2-5x+3$ ແລະ $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{bmatrix}$, ຈົ່ງຄິດໄລ່ $f(A)$

2. (1.5ຄະແນນ) ຈົ່ງຄິດໄລ່ $\int_3^4 \frac{5x-3}{x^2-3x+2}\,dx$

3. (1.5ຄະແນນ) ຈົ່ງຄິດໄລ່ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 3x\cos 5x}{\sin^2 3x}$

4. (1.5 ຄະແນນ) ໃຫ້ອັນດັບຈຳນວນ $a_1=\frac{1}{1.2.3}$, $a_2=\frac{1}{2.3.4}$, $a_3=\frac{1}{3.4.5}$, ...

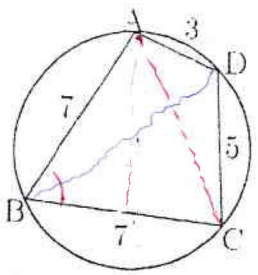
   4.1 ຈົ່ງຊອກພົດທົ່ວໄປ a_n

   4.2 ຈົ່ງຊອກຜົນບວກ $a_1+a_2+a_3+....$

5. (1.5 ຄະແນນ) ມີຮູບສີ່ແຈ ABCDແນບໃນຮູບວົງມົນ,
   ເຊິ່ງ AB = BC = 7, CD = 5 ແລະ DA = 3

   5.1 ຈົ່ງຊອກຫາ $\cos B$ ແລະ ລວງຍາວຂອງຂ້າງ AC

   5.2 ຈົ່ງຄິດໄລ່ເນື້ອທີ່ຂອງ $ABCD$



6. (2 ຄະແນນ) ໃນໜ້າພຽງOxyໃຫ້ເມັດ $A(-1\ ;\ 3)$, $B(1\ ;\ 1)$ ແລະເສັ້ນຊື່ $(d): y=2x$

   6.1 ຈົ່ງກຳນົດເມັດ C ທີ່ນອນຢູ່ເສັ້ນຊື່(d) ເພື່ອໃຫ້ ΔABC ເປັນຮູບສາມແຈທ່ຽງ

   6.2 ໃຫ້ເມັດ$M(2\ ;\ 4)$, ຈົ່ງຂຽນສົມຜົນວົງມົນແນບນອກΔABM

7. (1 ຄະແນນ) ໃຫ້ຮູບກ້ອນສາມ $ABCD.A'B'C'D'$ ມີຂ້າງເທົ່າກັບ 1. ໃຫ້ M, N ແມ່ນເມັດເຄິ່ງກາງຂອງ AB ແລະ CD. ຈົ່ງຄິດໄລ່ໄລຍະຫ່າງລະຫວ່າງສອງເສັ້ນຊື່ $A'C$ ແລະ MN.

ຄະນະກຳມະການອອກຫົວບົດ

ສາທາລະນະລັດ ປະຊາທິປະໄຕ ປະຊາຊົນລາວ

ສັນ ຕິພາບ ເອກະລາດ ປະຊາທິປະໄຕ ເອກະພາບ ວັດທະນາຖາວອນ

_____$$$$$_____

ກະຊວງສຶກສາທິການ

ກົມວິທະຍາສຶກສາ

ຂໍ້ສະເໜີຕອບບ ວ**ບ**ິດສອບເສັງແຂ່ງຂັນນັກຮຽນເກັ່ງ ຊັ້ນ ມ7ທົ່ວປະເທດ ສົກຮຽນ 2011-2012

ວິຊາ ຄະນິດສາດ, ໃຊ້ເວລາ: 120 ນາທີ

ຂໍ້	ຄຳຕອບ	ຄະແນນ
ຂໍ້ທີ 1 ໃຫ້ ... ຄະແນນ	... $f(A)=A^2-5A+I$ $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{bmatrix}$ ... $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$	0,25
	$A^2=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -5\\ -15 & 12\end{bmatrix}$	0,25
	$-5A=-5\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & 5\\ 15 & -15\end{bmatrix}$ $3I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$	0,25
	... $f(A)=\begin{bmatrix}7 & -5\\ -15 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-10 & 5\\ 15 & -15\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$	0,25
ຂໍ້ 2 ... ... ມ	$f(x)=\frac{5x-3}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$ $\Leftrightarrow 5x-3=A(x-2)+B(x-1)$ $\Leftrightarrow 5x-3=(A+B)x-2A-B$ $\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=5\\ -2A-B=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-2\\ B=7\end{cases}$	0,75
	$I=\int_3^4 f(x)dx=-2\int_3^4\frac{dx}{x-1}+7\int_3^4\frac{dx}{x-2}$ $=-2\left(\ln\lvert x-1\rvert\right)\Big\rvert_3^4+7\left(\ln\lvert x-2\rvert\right)\Big\rvert_3^4$ $=-2(\ln 3-\ln 2)+7(\ln 2-\ln 1)$ $=-2\ln 3+2\ln 2+7\ln 2-7\ln 1=9\ln 2-2\ln 3$	0,75
ຂໍ້ ... .5 ... ມ	$L=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 3x\cos 5x}{\sin^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)+\cos x(1-\cos 3x)+\cos x\cos 3x(1-\cos 5x)}{(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)}=$ $=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)}+\frac{\cos x}{1+\cos 3x}+\frac{\cos x\cos 3x(1-\cos 5x)}{(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)}\right)=$	0.5

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+\cos 3x}\cdot\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{3x}{2})}+\frac{\cos x}{1+\cos 3x}+\frac{\cos x\cos 3x}{(1+\cos 3x)}\times\frac{\sin^2(\frac{5x}{2})}{\sin^2(\frac{3x}{2})}\right)=$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{3x}{2})}+1+\frac{\sin^2(\frac{5x}{2})}{\sin^2(\frac{3x}{2})}\right) \quad (*)$$

0.5

จาก (*) เรา: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{3x}{2})} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2\times\left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2}{\left(\frac{3x}{2}\right)^2\times\left(\frac{\sin(\frac{3x}{2})}{\frac{3x}{2}}\right)^2}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{4}}=\frac{1}{9}$

0.25

และ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(\frac{5x}{2})}{\sin^2(\frac{3x}{2})} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{5x}{2}\right)^2\times\left(\frac{\sin(\frac{5x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2}{\left(\frac{3x}{2}\right)^2\times\left(\frac{\sin(\frac{3x}{2})}{\frac{3x}{2}}\right)^2}=\frac{\frac{25}{4}}{\frac{9}{4}}=\frac{25}{9}$; ดังนั้นเรา:

0.25

$L=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}+1+\frac{25}{9}\right)=\frac{35}{18}$

(4.1) $a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

0,25

(4.2) $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}$

$1=A(n+1)+Bn(n+2)+Cn(n+1)$; (1)

- แทน $n=0$ ใน (1) เราได้ $1=2A\Rightarrow A=\frac{1}{2}$
- แทน $n=-1$ ใน (1) เราได้ $1=-B\Rightarrow B=-1$
- แทน $n=-2$ ใน (1) เราได้ $1=2C\Rightarrow C=\frac{1}{2}$

0,50

$a_n=\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{n+2}$

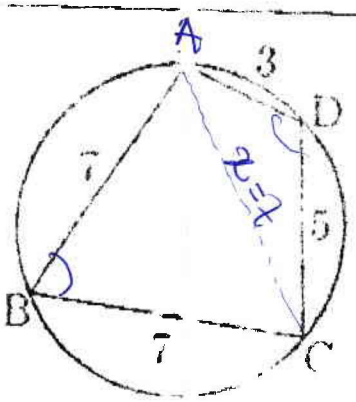
$a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$

แล้ว $a_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right)$, $a_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)$, $a_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right)$, $a_4=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right)$

0,50

$$\Rightarrow S_n = (1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2})$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

และ $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าแม่นจ้อม ดังนั้นผลบวกที่ต้องการหาคือ เท่ากับ $\frac{1}{4}$ — 0,25



5.1 ให้ $AC = x$

ในรูปสามเหลี่ยม ΔBAC และ ΔDAC จะได้:

$x^2 = 7^2 + 7^2 - 2.7.7.\cos B$ (1)

$x^2 = 3^2 + 5^2 - 2.3.5.\cos D$ (2) — 0,75

ข้อที่ 5

จาก ตร.

ข้อ

เนื่องจากเป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม,

ดังนั้น มุม $\hat{B} + \hat{D} = 180°$ หรือ $D = 180° - B$

$(2) \Rightarrow x^2 = 3^2 + 5^2 - 2.3.5\cos(180° - B)$

$\Rightarrow x^2 = 34 + 30\cos B$ (3)

จาก (1) และ (3) $\Rightarrow 98 - 98\cos B = 34 + 30\cos B$

$-128\cos B = -64 \quad \therefore \cos B = \frac{1}{2}$

จาก (3) $\Rightarrow x^2 = 34 + 15 = 49$ และ $\Rightarrow x > 0, \quad x = AC = 7$ — 0,25

5.2 จาก $\cos B = \frac{1}{2}$ จะได้ $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\sin D = \sin(180° - B) = \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$

เนื้อที่ ABCD เท่ากับ

$$S = \Delta BAC + \Delta DAC = \frac{1}{2}7.7.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}3.5.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$S = 16\sqrt{3}$ — 0,50

1. ...

ກ. ΔABC ...

+ ΔABC ... $\Leftrightarrow C \in (\Delta)$ ... AB.

ສົມຜົນ ... (Δ) ... $I(0,2)$ ... AB ... $\vec{AB} = (2,-2)$

ແມ່ນ $x + (y-2)(-2) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 2y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x - y + 2 = 0$

ຕົວປະສານ ... C ... ລະບົບສົມຜົນ:

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 & (\Delta) \\ y = 2x & (d) \end{cases}$$

ເຊິ່ງໄດ້ $C(2,4)$

0,5

+ ΔABC ... B $\Leftrightarrow BC = AB$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = AB^2 = 8$

ເຊິ່ງວ່າ $y = 2x$ ... ໄດ້ $(x-1)^2 + (2x-1)^2 = 8 - 5x^2 - 6x - 6 = 0$

ດັ່ງນັ້ນ $\left(\frac{3}{5} \pm \frac{\sqrt{39}}{5}; \frac{2(3 \pm \sqrt{39})}{5}\right)$

0,5

ΔABC ... B ... C ... (d)

ຂໍ້ທີ 6

2ຈ ... ແມ່ນ

+ ΔABC ... A $\Leftrightarrow AC^2 = AB^2 - (x+1)^2 + (y-3)^2 = 8$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 10x + 2 = 0 \quad (y = 2x)$

$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{15}}{5}$

ΔABC ... A ... C ... (d) $\left(\frac{5 \pm \sqrt{15}}{5}; \frac{2(5 \pm \sqrt{15})}{5}\right)$

0,5

2. ... ΔABC

ກຳນົດ a, b, c ... ສົມຜົນ

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

$M(2,4) \Leftrightarrow 4a + 8b - c - 20 = 0 \quad (1)$

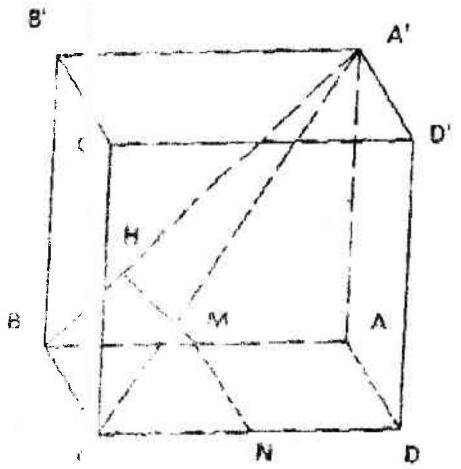
$A(-1,3) \Leftrightarrow 2a - 6b + c + 10 = 0 \quad (2)$

$B(1,1) \Leftrightarrow -a - 2b + c + 2 = 0 \quad (3)$

ແກ້ລະບົບສົມ ... ໄດ້: $a = \frac{3}{4}; b = \frac{11}{4}; c = 5$

ດັ່ງນັ້ນສົມຜົນ ... ຕ້ອງຊອກແມ່ນ: $x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}y + 5 = 0$

0,5



0,25

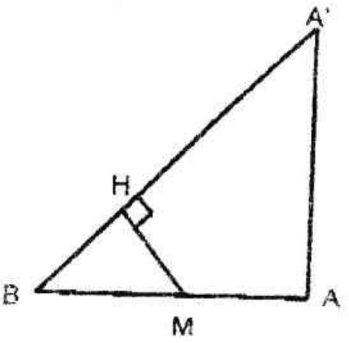
ຈາກເງື່ອນໄຂຂ້ອ[illegible] ເພາະວ່າ

- $MN // BC$; $MN \subset (A'BC)$, ສະນັ້ນ $d(MN, A'C) = d(MN, (A'BC))$
- $A'B \subset (A'B)$, $(A'AB) \perp MN$
- $d(A'C, (M[illegible])) = d(A'B, (MN))$
- ເຮົາແຕ້ມ $MH \perp A'B$

ຂ້ອ[illegible]
[illegible]

0,50

ຈາກເງື່ອນໄຂຂ້ອ[illegible] ຈະເຫັນວ່າຕາມຄຳສະຫຼຸບໄດ້ວ່າ MH ແມ່ນໄລຍະຫ່າງລະຫວ່າງ MN ແລະ $A'C$



0.25

ເຮົາເຫັນວ່າ

- ຮູບສ[illegible] $A'BA$ ແມ່ນຮູບສາມຫຼ່ຽມ ແລະ ສາກຢູ່ A, ມຸມ $\angle A'BA = 45°$
- $MH = MB \tan 45 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$